

# *“Cálculo com Números Complexos”*

**Autor: Sónia Teixeira**

# Índice

<b>ÍNDICE .....</b>	<b>0</b>
<b>1. INTRODUÇÃO .....</b>	<b>2</b>
<b>2. TEORIA DOS NÚMEROS COMPLEXOS .....</b>	<b>2</b>
2.1.    FORMA RECTANGULAR .....	2
2.1.1. <i>Soma de Dois Números Complexos</i> .....	3
2.1.2. <i>Subtracção de Dois Números Complexos</i> .....	3
2.1.3. <i>Multiplicação de Dois Números Complexos</i> .....	3
2.1.4. <i>Divisão de Dois Números Complexos</i> .....	3
2.2.    FORMA POLAR .....	4
2.2.1. <i>Multiplicação de Dois Números Complexos</i> .....	4
2.2.2. <i>Divisão de Dois Números Complexos</i> .....	5
2.3.    CONVERSÃO ENTRE FORMAS .....	5
2.3.1. <i>Conversão de Rectangular para Polar</i> .....	5
2.3.2. <i>Conversão de Polar para Rectangular</i> .....	6
2.4.    NÚMEROS COMPLEXOS CONJUGADOS .....	7
<b>3. OBJECTIVOS DO TRABALHO.....</b>	<b>ERRO! MARCADOR NÃO DEFINIDO.</b>
3.1.    ESTRUTURA DO PROGRAMA .....	<b>ERRO! MARCADOR NÃO DEFINIDO.</b>
<b>4. CONDIÇÕES DE ENTREGA.....</b>	<b>ERRO! MARCADOR NÃO DEFINIDO.</b>
<b>5. ANEXO A – FUNÇÕES MATEMÁTICAS .....</b>	<b>ERRO! MARCADOR NÃO DEFINIDO.</b>

# 1. Introdução

Os números complexos consistem numa representação vectorial, num plano cartesiano a duas dimensões, sendo constituídos por uma parte real, representada no eixo das abcissas e por uma parte imaginária, referenciada pelo número imaginário  $j$ , e representada no eixo das ordenadas.

O número imaginário, por definição, é obtido através da equação:

$$j = \sqrt{-1} \text{ ou } j^2 = -1 \quad (1.1)$$

Os números imaginários, em Engenharia, são bastante úteis pois permitem a representação de dois tipos de informação utilizando um único número. São utilizados, por exemplo, para definir impedâncias e sinais complexos (fasores).

## 2. Teoria dos Números Complexos

Existem duas formas distintas de representar números complexos: a forma rectangular, ou algébrica; e a forma polar ou trigonométrica.

### 2.1. Forma Rectangular

Na forma rectangular, um número complexo é representado na forma:

$$z = a + bj \quad (2.1)$$

Onde  $a$ , representa a parte real do número complexo e  $b$  a parte imaginária. Na figura 2.1, encontra-se a representação do número complexo  $z = 5 + 4j$ , no plano de Argand.

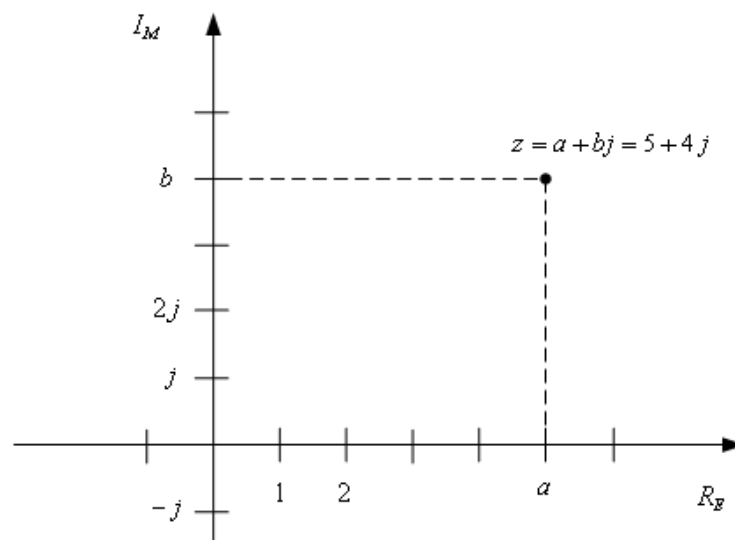


Figura 2.1: Representação de um número complexo, na forma rectangular, no plano de Argand.

As operações mais comuns realizadas com números complexos, na forma rectangular são: a soma; a subtracção; a multiplicação e a divisão.

### 2.1.1. Soma de Dois Números Complexos

Dados dois números complexos, na forma rectangular:  $z_1 = a + bj$  e  $z_2 = c + dj$ , a sua soma é obtida através da soma entre as partes reais e as partes imaginárias dos dois números, como se mostra na equação (2.2).

$$z_r = z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)j \quad (2.2)$$

### 2.1.2. Subtracção de Dois Números Complexos

A subtracção de dois números complexos, na forma rectangular, é similar à soma, procedendo-se no entanto, à subtracção entre as partes reais e imaginárias dos dois números:

$$z_r = z_1 - z_2 = (a - c) + (b - d)j \quad (2.3)$$

### 2.1.3. Multiplicação de Dois Números Complexos

A multiplicação de dois números complexos é feita à custa da multiplicação, valor a valor, dos elementos constituintes, como se mostra na equação:

$$z_r = z_1 \times z_2 = (a + bj) \times (c + dj) = ac + adj + bcj - bd = (ac - bd) + (ad + bc)j \quad (2.4)$$

Para proceder à multiplicação dos dois números, pode-se utilizar a equação geral resultante, sem necessidade de utilizar os passos intermédios.

### 2.1.4. Divisão de Dois Números Complexos

A divisão de dois números complexos, na forma rectangular, é realizada à custa da multiplicação do numerador e denominador pelo complexo conjugado do denominador (ver secção 2.4).

$$z_r = \frac{z_1}{z_2} = \frac{(a + bj)}{(c + dj)} = \frac{(a + bj)(c - dj)}{(c + dj)(c - dj)} = \left( \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} \right) + \left( \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} \right)j \quad (2.5)$$

Tal como no caso da multiplicação, para proceder à divisão dos dois números, pode-se apenas utilizar a equação simplificada, resultante da operação.

## 2.2. Forma Polar

Na forma polar, um número complexo é representado sob a forma:

$$Z = \rho e^{j\theta} = \rho \angle \theta \quad (2.6)$$

Onde  $\rho$  representa o módulo, ou amplitude, que traduz a distância entre a origem e a localização das coordenadas do número complexo (comprimento do vector). E  $\theta$  representa o argumento, ou fase, que traduz a “inclinação” do segmento de recta do módulo, com o eixo das abcissas. Na figura 2.2, encontra-se a representação do número complexo  $Z = 6,4 \angle 38,66^\circ$ , no plano de Argand.

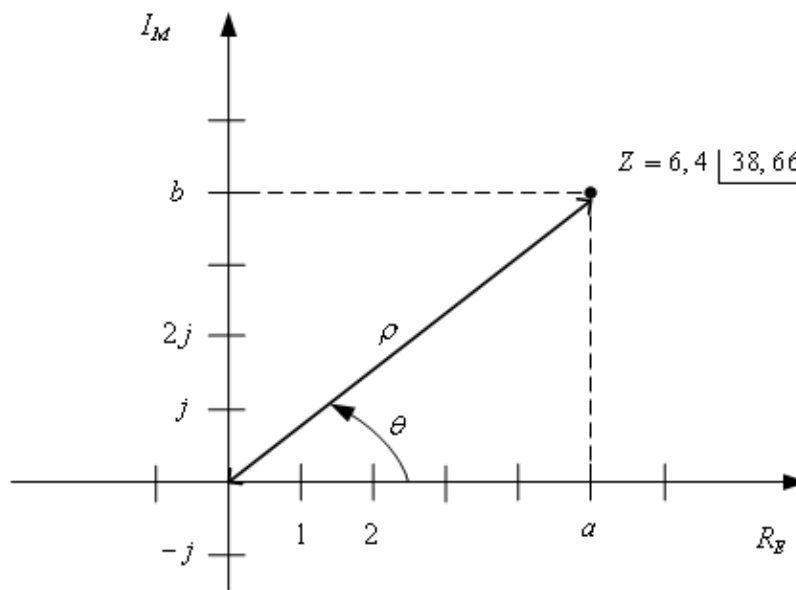


Figura 2.2: Representação de um número complexo, na forma polar, no plano de Gauss.

Na forma polar apenas é possível realizar as operações de multiplicação e divisão.

### 2.2.1. Multiplicação de Dois Números Complexos

Dados dois números complexos, representados na forma polar:  $Z_1 = \rho_1 \angle \theta_1$  e  $Z_2 = \rho_2 \angle \theta_2$ , a multiplicação dos dois números, é realizada através da multiplicação entre os dois módulos e soma dos dois argumentos:

$$Z_r = Z_1 \times Z_2 = (\rho_1 \angle \theta_1) \times (\rho_2 \angle \theta_2) = \rho_1 \times \rho_2 \angle \theta_1 + \theta_2 \quad (2.7)$$

### 2.2.2. Divisão de Dois Números Complexos

A divisão de dois números complexos, representados na forma polar, é realizada através da divisão entre os dois módulos e subtraindo os dois argumentos:

$$Z_r = \frac{Z_1}{Z_2} = \frac{\rho_1 \angle \theta_1}{\rho_2 \angle \theta_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \times \angle \theta_1 - \theta_2 \quad (2.8)$$

## 2.3. Conversão entre Formas

Por vezes é mais vantajoso realizar uma determinada operação numa determinada forma. Tome-se o exemplo da seguinte operação:

$$\frac{2+3j}{1-5j} + \frac{4-3j}{15+12j}$$

Pelas equações apresentadas anteriormente, é facilmente verificável, que a divisão é mais simples de realizar na forma polar, no entanto a soma apenas é possível na forma rectangular. Por este motivo torna-se, por vezes, necessário proceder à conversão entre formas.

### 2.3.1. Conversão de Rectangular para Polar

A conversão de um número complexo representado na forma rectangular para a forma polar é realizada através da aplicação directa do teorema de Pitágoras, que enuncia que a hipotenusa (módulo) ao quadrado, é igual à soma do quadrado dos catetos.

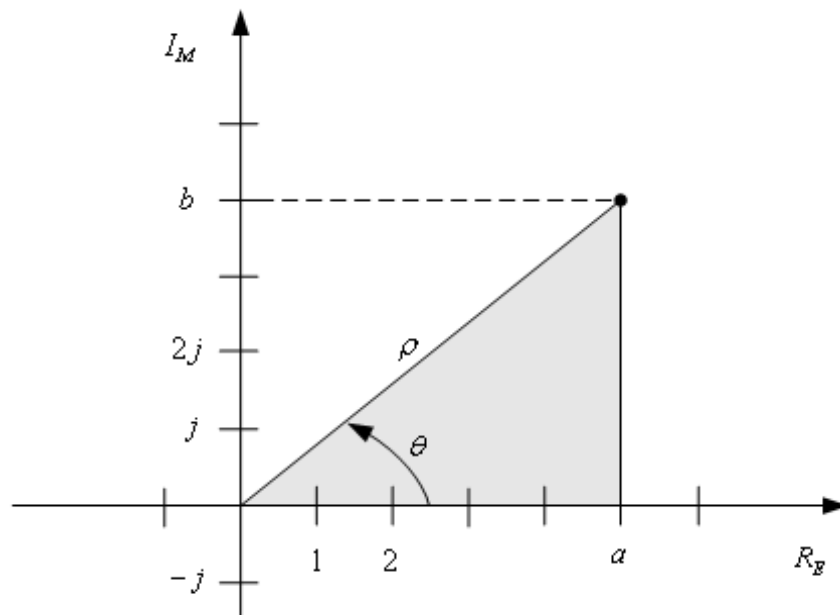


Figura 2.3: Conversão entre números complexos.

Através da análise na figura 2.3, pode-se concluir que:

$$\rho^2 = a^2 + b^2 \Leftrightarrow \rho = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (2.9)$$

Quanto ao argumento  $(\theta)$ , sabendo que:

$$\text{sen}(\theta) = \frac{b}{\rho} \quad \text{ou} \quad \cos(\theta) = \frac{a}{\rho} \quad (2.10)$$

Para obter o valor de  $\theta$ , aplica-se a função inversa do seno e cosseno, isto é, arco seno e arco cosseno, obtendo-se as equações:

$$\theta = \text{sen}^{-1}\left(\frac{b}{\rho}\right) \quad \text{e} \quad \theta = \cos^{-1}\left(\frac{a}{\rho}\right) \quad (2.11)$$

Como  $\frac{\text{sen}}{\cos} = \text{tg}$ , o argumento de um número complexo é obtido directamente através da equação:

$$\theta = \text{tg}^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) \quad (2.12)$$

### 2.3.2. Conversão de Polar para Rectangular

A conversão de números na forma polar para a forma rectangular é realizada com base na equação (2.10), cuja simplificação se apresenta na equação (2.13):

$$\rho \text{sen}(\theta) = b \quad \text{e} \quad \rho \cos(\theta) = a \quad (2.13)$$

A representação geral de um número complexo na forma rectangular, é dada pela equação:

$$z = a + bj = \rho \cos(\theta) + \rho \text{sen}(\theta) j \quad (2.14)$$

## 2.4. Números Complexos Conjugados

Dois números complexos dizem-se complexos conjugados se a sua parte imaginária for complementar, por exemplo, o complexo conjugado do número  $z = 2 + 3j$ , representado na forma rectangular, será  $\bar{z} = 2 - 3j$ . O complexo conjugado do número  $Z = 3 \angle 30^\circ$ , representado na forma polar, será  $\bar{Z} = 3 \angle -30^\circ$ . Resumindo, o conjugado de um número complexo, possui o mesmo módulo com argumento simétrico, como se pode observar na figura 2.4:

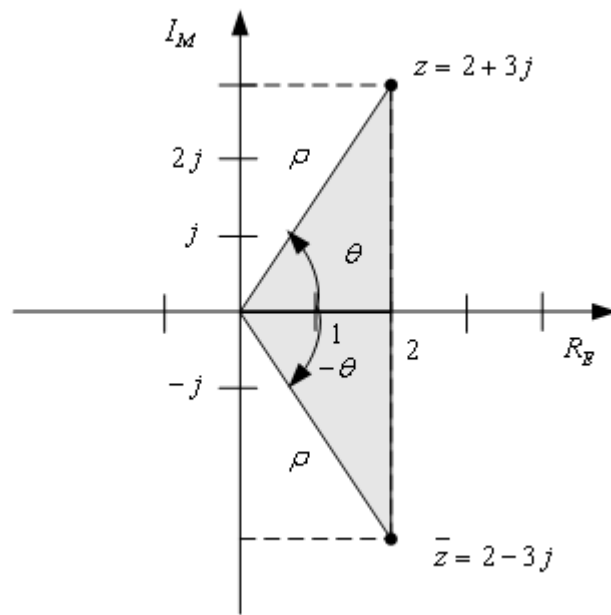


Figura 2.4: Representação de números complexos conjugados.