

# Números Complexos

Conceito, formas algébrica e trigonométrica e operações.

# Conceito (parte I)

Os números complexos surgiram para sanar uma das maiores dúvidas que atormentavam os matemáticos: Qual o resultado da operação  $X^2 + 1 = 0$  ?

$$X^2 = -1 \therefore X = \sqrt{-1}$$

# Conceito (parte II)

Por isso, foi criado um número especial, que denominamos algebricamente como  $i$ , que elevado ao quadrado resulte em  $-1$ , matematicamente:

$$i^2 = -1 \quad \therefore i = \sqrt{-1}$$

Esse novo conceito possibilitou a resolução da equação mostrada anteriormente

# Conceito (parte III)

Desse modo:

$$X^2 + 1 = 0$$

$$X = \sqrt{-1}$$

(como  $i = \sqrt{-1}$ )

$$X = i$$

# Conclusão do conceito

Assim, foi criado um novo conjunto numérico denominado conjunto dos números complexos ou conjunto dos números imaginários, que representamos pela letra  $C$ .

Conjunto dos números complexos =  $C$

# Relação fundamental

O conjunto dos números complexos possui, desse modo, a relação fundamental onde:

$$i^2 = -1$$

$$\text{Ou } i = \sqrt{-1}$$

# Exemplos

$$\sqrt{-2} = \sqrt{2}(-1)$$

Aplicando a  
relação  
fundamental:

$$\sqrt{-2} = i\sqrt{2}$$

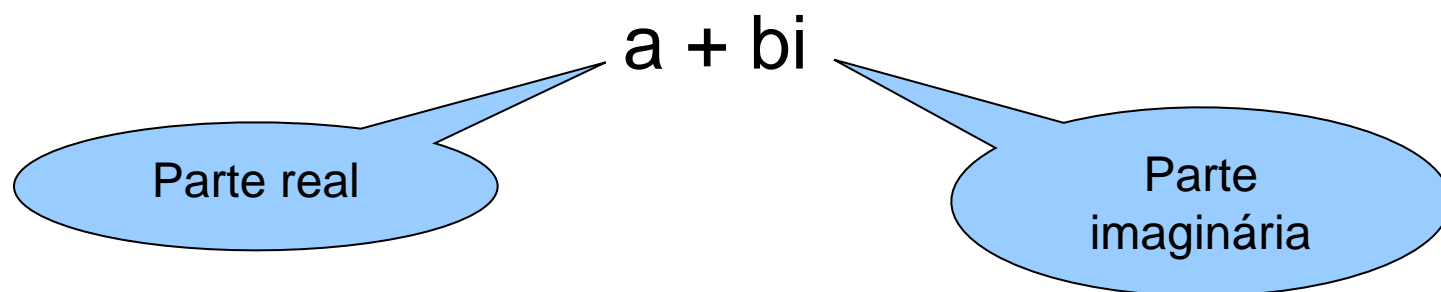
$$\sqrt{-4} = \sqrt{4}(-1)$$

Aplicando a  
relação  
fundamental:

$$\sqrt{-4} = 2i$$

# Forma algébrica (parte I)

O número complexo possui uma parte real e outra imaginária. Como a parte imaginária conta com a presença do  $i$ , sua forma algébrica é





# Forma algébrica (parte II)

Um número complexo que não possui parte real ( $a = 0$ ) é denominado número complexo puro. Um número complexo que não possua a parte imaginária ( $b = 0$ ) é denominado número real e os números imaginários que possui ambas as partes são simplesmente chamados de números complexos.

# Exemplos

$2 + 4i \rightarrow$  número complexo

$8 - i\sqrt{2} \rightarrow$  número complexo

$6i \rightarrow$  número complexo puro

$4 \rightarrow$  número real

$-i \rightarrow$  número complexo puro

$i^2 \rightarrow$  número real

# Conjugado de um número complexo

Um número complexo  $z = a + bi$  possui um conjugado que é representado por  $\bar{z}$ , onde:

$$\bar{z} = a - bi$$

(lê-se conjugado de  $z$ )

# Exemplos

Dados os números complexos, encontrar seus respectivos conjugados:

$$z = 2 - 4i \rightarrow \bar{z} = 2 + 4i$$

$$z = i \rightarrow \bar{z} = -i$$

$$z = 1 + 2i \rightarrow \bar{z} = 1 - 2i$$

$$z = 2 \rightarrow \bar{z} = 2$$

$$z = -3 - 8i \rightarrow \bar{z} = -3 + 8i$$

# Operações com números complexos na forma algébrica

Como os números reais possuem forma real e imaginária separadas, as operações de adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação diferem um pouco das habituais com números reais.

# Adição e subtração com números complexos na forma algébrica

Para somar e subtrair números complexos deve-se efetuar as operações na parte real e imaginária separadamente.

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$$

# Exemplos

$$(2 + 4i) + (3 + i) = (2 + 3) + (4 + 1)i = 5 + 5i$$

$$(1 + 4i) - (2 - 7i) = (1 - 2) + (4 - 7)i = -2 - 7i$$

$$(3 + i) - (4 + i) = (3 - 4) + (i - i) = -1$$

$$i + (2 + 4i) = 2 + (1 + 4)i = 2 + 5i$$

# Multiplicação com números complexos na forma algébrica

Para efetuar a multiplicação aplica-se simplesmente a distributiva:

$$(a + bi)(c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 \therefore$$

$$(a + bi)(c + di) = ac + adi + bci - bd \therefore$$

$$(a + bi)(c + di) = a(c + di) + b(-d + ci)$$



# Exemplos

$$(2 + 3i)(1 + i) = 2 + 3i + 3i + 3i^2 = 2 + 6i - 3 \\ = -1 + 6i$$

$$2(1 + i) = 2 + 2i$$

$$(2 - i)(-3 + 2i) = -6 + 4i + 3i - 2i^2 = -4 + 7i$$

# Divisão com números complexos na forma algébrica

Para se dividir números complexos, deve-se multiplicar ambos os números pelo conjugado do complexo do denominador.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2}$$

# Exemplo

$$\frac{3+2i}{1+i} = \frac{(3+2i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}$$

$$\frac{3+2i}{1+i} = \frac{3-3i+2i-2i^2}{1-i^2}$$

$$\frac{3+2i}{1+i} = \frac{5-i}{1+1} = \frac{5-i}{2}$$

$$\frac{3+2i}{1+i} = \frac{5}{2} - \frac{i}{2}$$

# Potências de $i$ (parte I)

Nas potências de  $i$  notam-se regularidades de quatro em quatro no expoente:

$$i^0 = 1$$

$$i^4 = 1$$

$$i^1 = i$$

$$i^5 = i$$

$$i^2 = -1$$

$$i^6 = -1$$

$$i^3 = -i$$

$$i^7 = -i$$

# Potências de $i$ (parte II)

Desse modo, para encontrar o resultado de qualquer potência, dividimos o expoente por 4 e resolvemos a potência utilizando como expoente o resto da divisão.

# Exemplo

1047	4
3	261

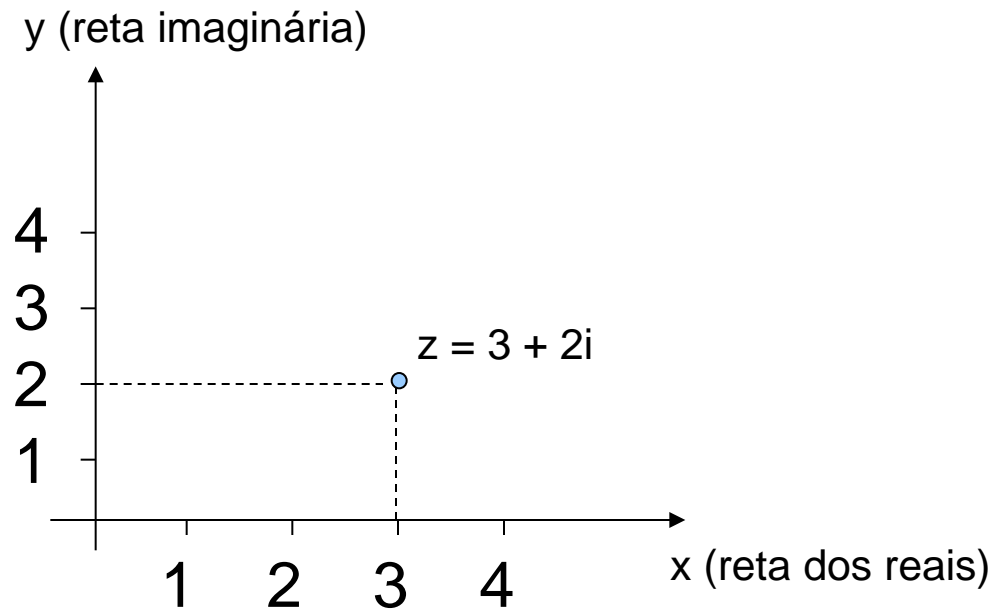

$$j^{1047} = j^3 = -j$$

# Número complexo no plano de Argand-Gauss

Os números complexos podem ser representados num plano, onde a reta das abscissas é a reta dos números reais e a das ordenadas é a reta dos números complexos. Esse plano é denominado plano de Argand-Gauss.

# Exemplo

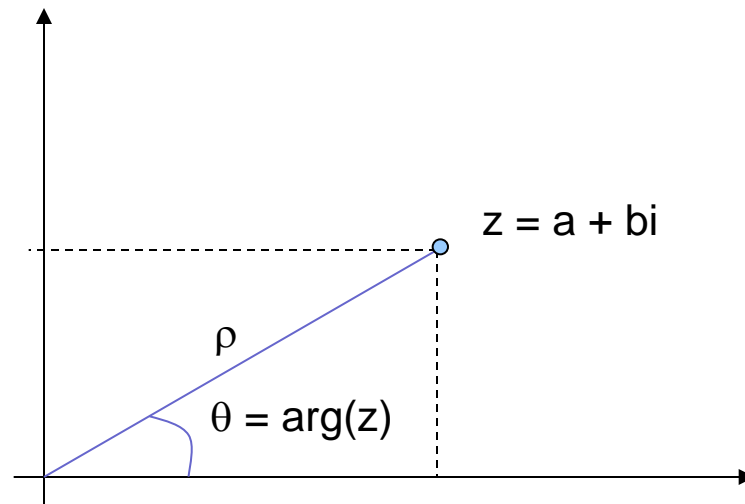
Colocar no plano de Argand-Gauss o número complexo  $z = 3 + 2i$



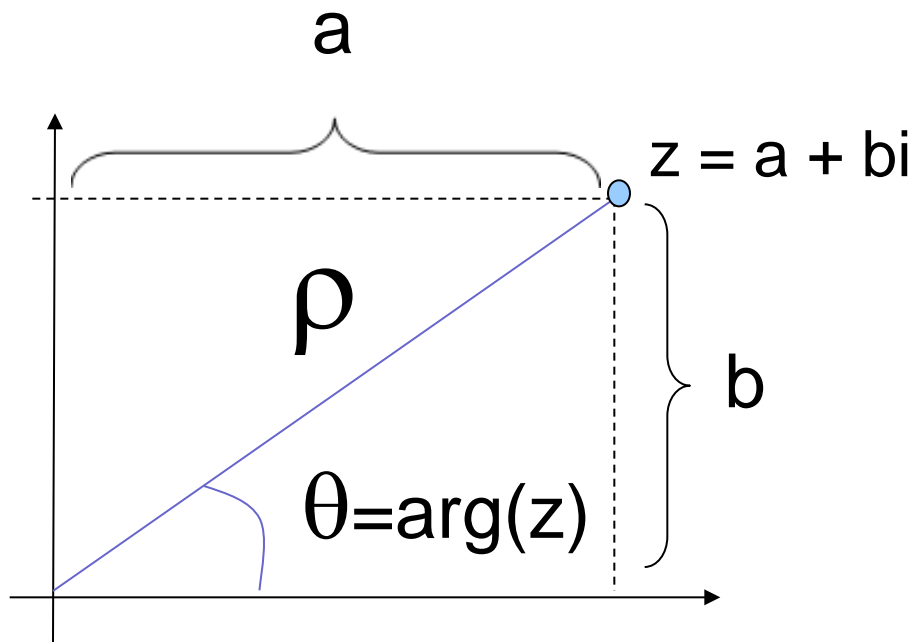


# Módulo e argumento de um número complexo (parte I)

No gráfico, o módulo de um número complexo  $z = a + bi$  é o segmento de reta que vai do ponto origem  $O(0,0)$  até o ponto  $P(a, b)$  do número complexo  $z$ . O argumento de  $z$  é o ângulo que esta forma com o eixo das abscissas em sentido anti-horário.



# Módulo e argumento de um número complexo (parte II)



$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\sin \theta = \frac{b}{\rho}$$

$$\cos \theta = \frac{a}{\rho}$$

$$\tan \theta = \frac{b}{a}$$

# Forma trigonométrica

Utilizando as relações dadas no slide anterior e aplicando-as à forma algébrica, obtemos a forma trigonométrica de um número complexo.

$$\sin \theta = \frac{b}{\rho} \therefore b = \rho \sin \theta$$

$$\cos \theta = \frac{a}{\rho} \therefore a = \rho \cos \theta$$



$$z = a + bi$$

$$z = \rho \cos \theta + \rho \sin \theta i$$

$$z = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$$

# Exemplo

Passar para a forma trigonométrica o número complexo  
 $z = 1 + i\sqrt{3}$

$$\rho = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$$

$$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \cos x = \frac{1}{2} \quad \arg(z) = \frac{\pi}{3}$$

$$z = \rho(\cos \theta + i \sin \theta) \therefore z = 2 \left( \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$$

# Operações com números complexos na forma trigonométrica - Multiplicação

Para multiplicar números complexos na forma trigonométrica utilizamos a fórmula:

$$z_1 z_2 = \rho_1 \rho_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)]$$

# Operações com números complexos na forma trigonométrica - Divisão

A fórmula para efetuar a divisão entre dois números complexos na forma trigonométrica é a seguinte:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)]$$

# Operações com números complexos na forma trigonométrica - Potenciação

Para efetuar a potenciação entre números complexos na forma trigonométrica utilizamos esta fórmula:

$$z^n = |z|^n [\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)]$$

# Operações com números complexos na forma trigonométrica – Radiciação

De forma análoga à potenciação, para efetuar a radiciação com números complexos na forma trigonométrica utilizamos a formula:

$$w = \sqrt[n]{|z|} \left[ \cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) \right]$$